

О СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Д.П. Ющенко¹, Ю.А. Ермоленко²

¹ Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
yuschenko@gsu.by

² ООО «Интервэйл-Гомель», Гомель, Беларусь
jlabych@yandex.ru

Обобщенная однородная система Навье — Стокса, описывающая колебательное состояние вязких микрополярных несжимающихся жидкостей, имеет вид [1]:

$$(\mu - \gamma)\Delta v - 2\gamma \operatorname{rot} \omega - \operatorname{grad} p + \rho\sigma^2 v = 0,$$

$$\theta\Delta\omega + (\eta + \tau) \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega - \gamma \operatorname{rot} v + 2\gamma\omega + \rho\sigma^2\omega = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (1)$$

где $v = (v_1, v_2, v_3)$ — линейная скорость течения жидкости, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость, p — давление, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, η , τ , θ — коэффициенты вращательной вязкости, γ — мера сцепления жидкой частицы со своим окружением, ρ — плотность жидкости, σ — частота колебаний.

Для системы (1) построена матрица фундаментальных решений $\Phi(x, y)$, имеющая точечную особенность в точке $x = y$, причем сингулярная часть матрицы $\Phi(x, y)$ имеет вид:

$$\Phi_0(x, y) = \|a_{ij}\|,$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{8\pi(\mu - \gamma)} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^3} \right],$$

$$a_{i+3,j+3} = \frac{1}{16\pi\theta(\eta + \tau + \theta)} \left[(\eta + \tau + 2\theta) \frac{\delta_{ij}}{r} + (\eta + \tau) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^3} \right],$$

$$a_{i+3,j} = a_{i,j+3} = 0, \quad a_{i7} = a_{7i} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_i - y_i}{r^3}, \quad a_{77} = (\mu - \gamma)\delta(x - y), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$\delta(x - y)$ — дельта-функция Дирака, r — евклидово расстояние от точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ до точки $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Наличие в матрице $\Phi(x, y)$ особенностей разных порядков (первого, второго, дельта-функции) обусловлено разными порядками старших производных в обобщенной системе Навье — Стокса.

Установлено, что в окрестности бесконечности матрица $\Phi(x, y)$ ведет себя как матрица $B = \|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij} = \frac{1}{r}, \quad b_{i+3,j+3} = \frac{1}{r^3}, \quad b_{i+3,j} = b_{j,i+3} = \frac{1}{r^2},$$

$$b_{i7} = b_{7i} = \frac{1}{r^2}, \quad b_{77} = b_{i+3,7} = b_{7,i+3} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Для областей, ограниченных достаточно гладкими поверхностями, получены формулы Грина и интегральные представления решений системы (1). Установлено также, что любое решение внутри таких областей имеет производные любого порядка.

Литература

1. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. *Асимметрическая гидромеханика* // ПММ. 1964. Т. 29. С. 297–308.